ENSAIT

Ecole Nationale Supérieure
des Arts et Industries Textiles

**CONCOURS D'ENTREE A - 2001**

**EPREUVE de MATHEMATIQUES II**

Durée 2 heures

(tous les candidats)

---

L'usage des calculatrices est autorisé

# notations et définitions:

Dans tout le problème $n$ désigne un entier supérieur ou égal à 2 .
Si $i$ et $j$ sont des entiers on note $[[i,j]]$ l'ensemble des entiers $k$ compris au sens large entre $i$ et $j$ :

$$k \in [[i,j]] \Leftrightarrow k \in \mathbb{N} \text{ et } i \leq k \leq j$$

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des bijections de $[[1,n]]$ dans $[[1,n]]$. Un élément de $\mathcal{S}_n$ s'appelle une permutation.
A tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$ on associe la matrice $P_\sigma$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$P_\sigma = (p_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \ : \ p_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = \sigma(j) \\ 0 \text{ si } i \neq \sigma(j) \end{cases}$$

On dira que $P_\sigma$ est une matrice de permutation et on notera $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des matrices de permutation de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On notera $I_n$ et $0_n$ la matrice identité et la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

# PREMIERE PARTIE :Exemples

1. Dans cette question $n = 3$ et $P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   1. Déterminer la bijection $\sigma$ correspondante.
   2. Montrer que $P_\sigma$ est la matrice d'une rotation de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ dont vous donnerez l'axe et l'angle.
   3. Montrer que $P_\sigma$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et donner les éléments propres de $P_\sigma$.

2. Dans cette question $n = 4$ et $P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   1. Déterminer la bijection $\sigma$ correspondante.
   2. Montrer que $P_\sigma$ est la matrice d'une symétrie orthogonale $s$ de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^4$ et déterminer les sous espaces propres correspondants.

3. Dans cette question $n = 4$ et $\sigma$ est définie par : $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 1$.

   1. Déterminer la matrice $P_\sigma$ correspondante.
   2. Calculer $P_\sigma^4$.
   3. Montrer que si $\lambda$ est valeur propre de $P_\sigma$ alors $\lambda^4 = 1$.
   4. Montrer que $P_\sigma$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et donner les éléments propres de $P_\sigma$.
   5. Montrer que $P_\sigma$ est semblable à :
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

# DEUXIEME PARTIE:Etude générale de $\mathcal{P}_n$

4.

   1. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}_n$?
   2. Soient $P_\sigma$ et $P_\tau$ deux matrices de permutation . Montrer que $P_\sigma P_\tau = P_{\sigma o \tau}$.
   3. Montrer que toute matrice de permutation est inversible et donner son inverse.
   4. Soit $P_\sigma$ une matrice de permutation .Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$,$P_\sigma^k$ est une matrice de permutation.
   5. Soit $P_\sigma$ une matrice de permutation. Montrer qu'il existe deux entiers distincts $q$ et $r$ tels que $P_\sigma^q = P_\sigma^r$ . En déduire qu'il existe un entier $a > 0$ tel que $P_\sigma^a = I_n$.
   6. Montrer que toute valeur propre (réelle ou complexe) d'une matrice de permutation $P_\sigma$ est de module 1 .

5. Soit $P_\sigma$ une matrice de permutation.

   1. Montrer que dans chaque colonne de $P_\sigma$ il y a un 1 et un seul ,les autres coefficients étant nuls.
   2. Montrer que dans chaque ligne de $P_\sigma$ il y a un 1 et un seul ,les autres coefficients étant nuls.
   3. Montrer que $P_\sigma$ est une matrice orthogonale.
   4. Montrer que toute matrice de permutation $P_\sigma$ admet la valeur propre 1 .

6. On considère dans cette question seulement la permutation $\sigma : \begin{cases} \sigma(i) = i \text{ si } 1 \leq i \leq n-2 \\ \sigma(n-1) = n \\ \sigma(n) = n-1 \end{cases}$ :

   Déterminer la matrice $P_\sigma$ correspondante et montrer que c'est la matrice d'une symétrie orthogonale de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ .Préciser les sous espaces propres de cette symétrie.

7.

   1. Montrer que le déterminant d'une matrice de permutation est 1 ou $-1$ .
   2. Donner un exemple $M$ telle que : $M \in \mathcal{P}_n$ et $\det(M) = -1$ .
   3. On note $\mathcal{P}_n^+$ le sous ensemble de $\mathcal{P}_n$ des matrices de déterminant $+1$ et $\mathcal{P}_n^-$ celui des matrices de déterminant $-1$ . On considère l'application $\phi$ définie par : $\forall P_\sigma \in \mathcal{P}_n : \phi(P_\sigma) = MP_\sigma$ .
      Montrer que $\phi$ est une bijection de $\mathcal{P}_n^+$ dans $\mathcal{P}_n^-$ . En déduire le cardinal de $\mathcal{P}_n^+$ .

8. Soit $P_\sigma$ une matrice de permutation <u>distincte de la matrice identité.</u>

   1. Montrer que la trace de $P_\sigma$ est un élément de $[[0, n-2]]$ .
   2. Montrer que deux matrices de permutation de trace $n-2$ sont toujours semblables.
   3. En discutant selon la valeur de $n$ indiquer si deux matrices de trace nulle sont toujours semblables ou pas .